

TD 12 : Nombres réels

Supremum et infimum (pratique)

1 ★★ Lorsqu'elles existent, déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{x(1-x) \mid x \in \mathbb{R}\} & B &= \{e^{-\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \\ C &= \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} & D &= \{\arctan(e^x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ E &= \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < 2\} & F &= \{n^{(-1)^n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \end{aligned}$$

2 ★★★ Lorsqu'elles existent, déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

- $A = \left\{\frac{1}{p-q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } p \neq q\right\}$
- $B = \left\{\frac{pq}{p^2+q^2} \mid p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$
- $C = \left\{\frac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+q} \mid p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$
- $D = \{p^4 - 6p^2q + 9q^2 \mid p, q \in \mathbb{R}\}$

Supremum et infimum (théorique)

3 ★★ Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$ qui est majorée.

- Montrer que A possède une borne supérieure, qu'on notera M .

On admet le théorème suivant :

Si une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est convergente, alors elle est constante à partir d'un certain rang.

- En déduire que A possède un maximum.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$. Justifier que B possède un maximum. Que vaut $\max(B)$?

4 ★★★ Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée. On note $M = \sup A$. On suppose que $M \notin A$.

- Justifier que A n'admet pas de maximum.
- Montrer que pour tout $\delta > 0$, l'intervalle $[M - \delta, M]$ contient une infinité d'éléments de A .

5 ★★★ Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties non vides bornées.

- On définit l'ensemble

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

Montrer que $A + B$ est majoré et que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

- On définit l'ensemble

$$|A| := \{|a| \mid a \in A\}$$

Montrer que $|A|$ est majoré et déterminer $\sup |A|$ en fonction des supremum et/ou infimum de A .

Ensembles usuels, densité

6 ★★ (Nombres rationnels)

Rappel : si x et y sont rationnels, alors $x + y$, $x - y$, xy et x/y (si y est non nul) sont aussi rationnels.

- Soit $x, y \in \mathbb{Q}$ positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.
- Montrer que les nombres $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ ainsi que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.
On peut utiliser le résultat suivant : si n ne s'écrit pas comme le carré d'un entier, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

7 ★★ Pour tout réel x , et entier naturel n , on pose $r_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$.
- En déduire que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

8 ★★★ Montrer que les ensembles suivants sont denses dans $\mathbb{R}$:

$$X = \{\sqrt[n]{r} \mid r \in \mathbb{Q}\} \quad Y = \left\{\frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

9 ★★★ (nécessite d'avoir fait maths expertes)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'objectif est de montrer que $\frac{1}{k} \in \mathbb{D}$ si et seulement si k peut s'écrire $2^p 5^q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

- Traiter le sens indirect.
- Montrer que si k est un multiple de 3, alors $\frac{1}{k} \notin \mathbb{D}$.
- Traiter le sens direct en raisonnant par contraposée.